Applications linéaires

Table des matières

1 Généralités sur les applications linéaires

1.1 Définitions

Définition 1.1 : *Application linéaire*

Soient E et F deux espaces vectoriels. On considère une application u de E vers F

$$\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Cette application est dite **linéaire** si

(i) $\forall x, y \in E$, $u(x+y) = u(x) + u(y)$,

(ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$,

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

On peut vérifier les deux conditions simultanément :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad u(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot u(x) + \mu \cdot u(y).$$

Une application linéaire est une application linéaire entre deux espaces vectoriels qui respecte leur structure d'espace vectoriel.

Exemple 1 (Application nulle)**.** *L'application linéaire suivante est appelée* ***application nulle***

$$0_{\mathcal{L}(E,F)} : \begin{array}{cl} E & \to F \\ x & \mapsto 0_F \end{array}$$

Exemple 2. *Montrer que l'application suivante est linéaire*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution.

Définition 1.2 : *Endomorphisme*

Une application linéaire de E vers E lui-même est appelée **endomorphisme**.

L'ensemble des endomorphismes de E est noté plus simplement $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 3 (Application identité)**.** *L'endomorphisme de E suivant est appelé* ***application identité de*** E

$$Id_E : \begin{array}{cl} E & \to E \\ x & \mapsto x \end{array}$$

Exemple 4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application suivante est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array}$$

Exemple 5. *L'application suivante est linéaire :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

La dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Propriété 1.3 : *Image de l'élément nul*

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors
$$u(0_E) = 0_F.$$

Démonstration. Comme u est linéaire, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$. En particulier, pour $\lambda = 0$,
$$u(0_E) = u(0 \cdot x) = 0 \cdot u(x) = 0_F$$
□

Pour vérifier qu'une application n'est pas linéaire, il peut suffire de vérifier que $u(0_E) \neq 0_F$.

Propriété 1.4 : *Image d'une combinaison linéaire*

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ des vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires. On a
$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u(e_i)$$

Démonstration. La démonstration se fait sans difficulté par récurrence sur n. □

1.2 Opérations usuelles

1.2.1 L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 1.5 : *Opérations usuelles sur les applications linéaires*

Si $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit
$$u + v : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) + v(x) \end{array}$$
$$\lambda \cdot u : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda \cdot u(x) \end{array}$$
$u + v$ et $\lambda \cdot u$ sont encore des applications linéaires.

Propriété 1.6 : *Structure de $\mathcal{L}(E, F)$*

Si E et F sont deux espaces vectoriels, $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est donc également un espace vectoriel.

Démonstration. Montrons que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}(E, F)$, l'ensemble des applications de E dans F.

(i) Par définition, $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{A}(E, F)$.

(ii) Comme l'application nulle de E dans F est linéaire, elle appartient à $\mathcal{L}(E, F)$.

(iii) D'après la proposition précédente, si $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u + v$ et $\lambda \cdot u$ sont dans $\mathcal{L}(E, F)$.

On en conclut que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, F)$ donc un espace vectoriel. □

Propriété 1.7 : *Composition d'applications linéaires*

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$.

On retiendra que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(v \circ u)(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= v(u(\lambda \cdot x + \mu \cdot y)) \\ &= v\left(\lambda \cdot u(x) + \mu \cdot u(y)\right) \quad \text{par linéarité de } u \\ &= \lambda \cdot v(u(x)) + \mu \cdot v(u(y)) \quad \text{par linéarité de } v \\ &= \lambda \cdot (v \circ u)(x) + \mu \cdot (v \circ u)(y)\end{aligned}$$

□

En particulier, la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E.

1.2.2 L'ensemble $\mathcal{L}(E)$

Dans l'ensemble $\mathcal{L}(E)$, on peut donc composer les endomorphismes de E entre eux sans restriction.

Définition 1.8 : *Puissance d'un endomorphisme*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $u^0 = Id_E$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit u^p par la relation de récurrence

$$u^p = u^{p-1} \circ u.$$

On a $u^p = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{p \text{ fois}}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 6. *Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ par*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$, reconnaître u^p.

Solution.

Exemple 7. *On définit l'endomorphisme d de $\mathbb{R}[X]$ par*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, reconnaître d^n.

Solution.

Théorème 1.9 : *Binôme de Newton*

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}$. Si u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$) alors

$$(u+v)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot u^k \circ v^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot u^{p-k} \circ v^k$$

Démonstration. La démonstration suit exactement les mêmes étapes que celles du chapitre Dénombrement. □

1.3 Noyau et image d'une application linéaire

1.3.1 Image, applications linéaires surjectives

Définition 1.10 : *Image d'une application linéaire*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **image** de u l'ensemble suivant

$$\mathrm{Im}(u) = \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in E, u(x) = y\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent par u dans E.

Exemple 8. *On définit l'application linéaire u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x + y \end{array}$$

Déterminer $\mathrm{Im}(u)$.

Solution.

Proposition 1.11 : *Structure de l'espace image*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

(i) Par définition de l'espace image, $\mathrm{Im}(u) \subset F$.

(ii) Comme $u(0_E) = 0_F$, $0_F \in \mathrm{Im}(u)$.

(iii) Soient y_1 et y_2 dans $\mathrm{Im}(u)$: ils existent x_1 et x_2 dans E tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 = \lambda \cdot u(x_1) + \mu \cdot u(x_2) = u(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) \in \mathrm{Im}(u), \text{ par linéarité de } u.$$

On en conclut que $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Remarque 1.12 : *Rappel : surjectivité*

u est surjective si chaque vecteur de F a au moins un antécédent par u.

Proposition 1.13 : *Surjectivité de u*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow \operatorname{Im}(u) = F$$

Démonstration. Dire que u est surjective revient à dire que chaque élément de F s'écrit comme image par u d'un élément de E. □

On peut également noter que $\operatorname{Im}(u) = \{0_F\}$ si et seulement si u est l'application nulle.

1.3.2 Noyau, applications linéaires injectives

Définition 1.14 : *Noyau*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau** de u l'ensemble suivant

$$\operatorname{Ker}(u) = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_F\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont un antécédent du vecteur nul.

Proposition 1.15 : *Structure du noyau*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble $\operatorname{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Montrons que $\operatorname{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(i) Par définition du noyau, $\operatorname{Ker}(u) \subset E$.

(ii) Comme $u(0_E) = 0_F$, $0_E \in \operatorname{Ker}(u)$.

(iii) Soient x_1 et x_2 dans $\operatorname{Ker}(u)$: $u(x_1) = u(x_2) = 0_F$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$u(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) = \lambda \cdot u(x_1) + \mu \cdot u(x_2) = 0_F, \text{ par linéarité de } u.$$

Ainsi $\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 \in \operatorname{Ker}(u)$. On en conclut que $\operatorname{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Afin de déterminer une base de $\operatorname{Ker}(u)$, on cherche à résoudre l'équation $u(x) = 0_F$.

Exemple 9. *Déterminer une base de* $\operatorname{Ker}(u)$ *avec u définie par*

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution.

Exemple 10. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Déterminer une base de* $\operatorname{Ker}(u)$ *avec u définie par*

$$u: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Solution.

Remarque 1.16 : *Rappel : injectivité*

u est injective si chaque vecteur de F a au plus un antécédent par u. Autrement dit,

$$\forall x, x' \in E, \quad u(x) = u(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

Proposition 1.17 : *Injectivité de u*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$$

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que u est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0_F$, soit encore $u(x) = u(0_E)$. L'injectivité de u nous permet de conclure que $x = 0_E$. On en déduit que $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$. Soient $x, x' \in E$ tels que $u(x) = u(x')$:

$$\begin{aligned} u(x) = u(x') \Leftrightarrow u(x) - u(x') = 0_F \Leftrightarrow u(x - x') = 0_F \text{ par linéarité de } u \\ \Leftrightarrow x - x' \in \operatorname{Ker}(u) \Leftrightarrow x - x' = 0_E \Leftrightarrow x = x' \end{aligned}$$

u est donc injective. □

On peut également noter que $\operatorname{Ker}(u) = E$ si et seulement si u est l'application nulle.

Exemple 11. *Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par*

$$u(P) = P(X + 1)$$

Montrer que u est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

1.4 Isomorphismes

Remarque 1.18 : *Rappel : bijection*

u est bijective si chaque vecteur de F a exactement un antécédent par u. Une application u est donc bijective si, et seulement si u est à la fois injective et surjective.

Définition 1.19 : *Isomorphisme*

Un **isomorphisme** de E vers F est une application linéaire bijective de E vers F.

u^{-1} est trivialement bijective comme réciproque d'une application bijective. Ce qui est intéressant dans la proposition suivante est le fait que u^{-1} est une application linéaire.

Proposition 1.20 : *Réciproque d'un isomorphisme*

Si u est un isomorphisme de E vers F, alors sa réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F vers E.

Démonstration. Si u est une bijection de E vers F, alors u^{-1} est une bijection de F vers E. Montrons que $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Soient $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Posons $x_1 = u^{-1}(y_1)$ et $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

$$\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2 = \lambda \cdot u(x_1) + \mu \cdot u(x_2) = u(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) \quad \text{par linéarité de } u.$$

En composant par u^{-1} des deux côtés on obtient

$$u^{-1}(\lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2) = u^{-1}\left(u(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2)\right) = \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 = \lambda \cdot u^{-1}(y_1) + \mu \cdot u^{-1}(y_2)$$

ce qui démontre que $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. □

Propriété 1.21 : *Composition d'isomorphismes*

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, u un isomorphisme de E vers F et v un isomorphisme de F vers G. Alors $v \circ u$ est un isomorphisme de E vers G et

$$(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}.$$

Démonstration. Puisque la composée de deux bijections est une bijection, la démonstration se fait directement avec la propriété 1.7. □

Définition 1.22 : *Espaces vectoriels isomorphes*

Soient E et F deux espaces vectoriels. On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F.

Exemple 12. *$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_3[X]$ sont isomorphes puisque l'application linéaire suivante est un isomorphisme*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & aX^3 + bX^2 + cX + d \end{array}$$

Théorème 1.23 : *Caractérisation de la dimension finie*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

$$E \text{ est de dimension } n \quad \Leftrightarrow \quad E \text{ est isomorphe à } \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Si E est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et u un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'après la proposition 2.6, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de E. E est donc de dimension n.
$\Rightarrow$ Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors on peut définir un isomorphisme u de E vers $\mathbb{R}^n$. Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application :

$$\begin{array}{rccc} u: & E & \to & \mathbb{R}^n \\ & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \end{array}$$

On peut ensuite vérifier que u est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$. □

Corollaire 1.24 : *Egalité des dimensions de deux espaces vectoriels isomorphes*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$$

Exemple 13. *Montrer que $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes. Déterminer un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}_2[X]$.*

Solution.

1.5 Projecteurs

Dans tout ce paragraphe, on considère E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Tout vecteur de E se décompose donc de manière unique en tant que somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 :

$$\forall x \in E, \quad \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2,\ x = x_1 + x_2.$$

Définition 1.25 : *Projecteurs*

On peut donc définir de manière unique les applications p et q de E dans E telles que, pour tout $x \in E$,

$$x = p(x) + q(x) \text{ avec } p(x) \in F_1 \text{ et } q(x) \in F_2.$$

On appelle :

(i) p le **projecteur sur F_1 parallèlement à F_2**

(ii) q le **projecteur sur F_2 parallèlement à F_1**

Les projecteurs p et q sont appelés **projecteurs associés**.

On observe que l'on peut définir q comme $q = Id_E - p$. Pour tout $x \in E$, on a

$$p(x) \in F_1 \qquad \text{et} \qquad x - p(x) \in F_2.$$

Exemple 14. *En notant* $F_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ *et* $F_2 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, *on sait déjà que*

$$\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2.$$

Pour tout élément de $\mathbb{R}^3$, *on a donc la décomposition unique suivante*

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}.$$

Soient p et q les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$p\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}.$$

Alors p et q sont deux projecteurs associés. Plus exactement,

(i) p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2

(ii) q est le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1

Exemple 15. *On note*

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices symétriques de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices antisymétriques de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. *Montrer que* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. *Déterminer un projecteur sur* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *parallèlement à* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Solution.

Propriété 1.26 : *Projecteurs*

Si p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 et q le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1, alors

(i) p et q sont des endomorphismes de E

(ii) $p + q = Id_E$

(iii) $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q) = F_2$ et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p) = F_1$

(iv) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

(v) $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont à démontrer en exercice.

(iii) Soit $x \in F_1$. La décomposition de x selon $F_1 \oplus F_2$ est $x = p(x) + 0_E$. Ainsi

$$x - p(x) = q(x) = 0_E.$$

Donc $F_1 \subset \mathrm{Ker}(q)$. Maintenant si $x \in \mathrm{Ker}(q)$, alors $q(x) = x - p(x) = 0_E$, puis $x = p(x)$. D'où $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$. on en conclut que

$$F_1 \subset \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$$

Enfin, par définition, $\mathrm{Im}(p) \subset F_1$. Ainsi, par double inclusion, on a bien

$$F_1 = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p).$$

Par symétrie, on montre que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q) = F_2$.

(iv) Soit $x \in E$. On a $q(x) \in \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$. D'où $p \circ q(x) = 0_E$. De même, on obtient $q \circ p(x) = 0_E$.

(v) Soit $x \in E$. On a $p(x) - p \circ p(x) = p\,(x - p(x)) = p(q(x)) = 0_E$. D'où $p \circ p = p$. De même, $q \circ q = q$.

□

Théorème 1.27 : *Caractérisation des projecteurs*

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$u \text{ est un projecteur de } E \quad \Leftrightarrow \quad u \circ u = u.$$

Démonstration. $\Rightarrow$ Si u est un projecteur de E alors $u \circ u = u$ d'après le (v) de la propriété 1.26.

$\Leftarrow$ On suppose que $u \circ u = u$.

- Montrons que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u)$. Soit $x \in E$, on a

$$x = \underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)} + \underbrace{x - u(x)}_{\in \mathrm{Ker}(u)}.$$

  En effet, $u\,(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = 0_E$. Ainsi, $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u)$.

- Montrons que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$. Si $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, alors $x = u(z)$ avec $z \in E$ et $u(x) = 0_E$. D'où

$$0_E = u(x) = u^2(z) = u(z) = x.$$

  On a $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

- Comme $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$, soit $x \in E$, alors ils existent $x_1 \in \mathrm{Im}(u)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u)$ tels que

$$x = x_1 + x_2$$

  Comme $x_1 \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $y \in E$ tel que $x_1 = u(y)$, ainsi

$$u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u(u(y)) = u(y) = x_1.$$

  u est bien le projecteur sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$.

□

2 Applications linéaires en dimension finie

Dans toute cette section, on suppose que E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

2.1 Rang d'une application linéaire

Proposition 2.1 : *Image d'une base par une application linéaire*

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors une application linéaire u de E dans F est définie de manière unique par la donnée de la famille

$$(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)).$$

Démonstration. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille d'éléments de F. On va montrer qu'il existe une unique application linéaire u telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$u(e_i) = f_i.$$

- Analyse : on suppose qu'il existe une telle application u. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \in E$. Par linéarité de u,

  $$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i.$$

  Ce qui définit entièrement u.
- Synthèse : soit u l'application de E dans F qui associe à tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ le vecteur

  $$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i.$$

  Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme

  $$e_i = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \cdots + 0 \cdot e_n,$$

  on a $u(e_i) = f_i$. Il ne reste plus qu'à montrer que u est linéaire (à faire en exercice). Dès lors, u satisfait bien les conditions demandées.

D'où l'existence d'une unique application linéaire u qui convient. $\square$

Proposition 2.2 : *Famille génératrice de* $\mathrm{Im}(u)$

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)).$$

C'est en particulier vrai lorsque $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Démonstration. Montrons par double inclusion que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.

- Montrons que $\mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \subset \mathrm{Im}(u)$. On note que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une famille de vecteurs du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(u)$ de F donc $\mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \subset \mathrm{Im}(u)$.

- Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists x \in E$ tel que $u(x) = y$. Comme $x \in E$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i.$$
Ainsi en composant par u de part et d'autre de l'égalité,
$$y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u(e_i)$$
Ainsi $y \in \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ d'où $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$.

La double inclusion nous permet de conclure que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$. □

Afin de déterminer une famille génératrice (voire une base) de $\mathrm{Im}(u)$, on cherche à déterminer l'image d'une famille génératrice de l'espace de départ.

Exemple 16. *Déterminer une base de l'image de u définie par*
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 3x + 7y \\ 2y \\ x - y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution.

Exemple 17. *Déterminer une base de l'image de u définie par*
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P + P' \end{aligned}$$

Solution.

Définition 2.3 : *Rang d'une application linéaire*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de u la dimension de l'image de u que l'on note
$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E. D'après la proposition 2.2,
$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)))$$

2.2 Applications linéaires et familles de vecteurs

Proposition 2.4 : *Surjectivité de u en dimension finie*

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) = F$$

Démonstration. Démonstration évidente avec les propositions 1.13 et 2.2. □

Exemple 18. *Montrer que l'application linéaire u suivante est surjective*
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution.

Proposition 2.5 : *Injectivité de u en dimension finie*

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \text{ est une famille libre de } F.$$

Démonstration. Il suffit à l'aide de la proposition 1.17 de montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\} \Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \text{ est une famille libre de } F.$$

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Soient $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u(e_i) = 0_F$, alors

$$0_F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u(e_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i\right) \quad \text{par linéarité de } u.$$

Comme $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, alors on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant libre, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont donc tous nuls. La famille $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une famille libre de F.

$\Leftarrow$ Supposons que la famille $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ soit une famille libre de F. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \subset E$, comme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe $(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i.$$

On a alors

$$0_F = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u(e_i) \quad \text{par linéarité de } u.$$

Or la famille $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est libre, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont donc tous nuls. On a $x = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. □

Avec la démonstration de la première implication de la proposition 2.5, on remarque que l'image de toute famille libre par une application injective est une famille libre.

Proposition 2.6 : *Isomorphisme et bases*

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est un isomorphisme } \Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \text{ est une base de } F$$

u est donc un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Démonstration. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. D'après les propositions 2.4 et 2.5,

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow u(\mathcal{B}) \text{ est une famille libre de } F.$$

$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow u(\mathcal{B}) \text{ est génératrice de } F.$$

□

Exemple 19. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

Montrer que u est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution.

2.3 Théorème du rang

Théorème 2.7 : *Théorème du rang*

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$. $\mathcal{F}$ est une famille libre de E que l'on peut compléter en une base de E (par le théorème de la base incomplète). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une telle base. Montrons que $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. D'après la proposition 2.2,

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)).$$

Or, $u(e_1) = u(e_2) = \cdots = u(e_p) = 0_F$ donc

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n)).$$

$(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. De plus, soient $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$0_F = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \cdot u(e_i) = u\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \cdot e_i\right).$$

On remarque que $\displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \in \mathrm{Ker}(u)$ dont une base est $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Il existe donc des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot e_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} -\alpha_i \cdot e_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E.$$

Comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et donc une famille libre, on en déduit que tous les λ_i et α_i sont nuls. On a donc démontré que $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = p$ et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = n - p$, alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = p + (n-p) = n = \dim(E).$$

□

Dans la pratique, il suffit donc de déterminer la dimension du noyau ou celle de l'image d'une application linéaire pour avoir les deux dimensions.

Exemple 20. *Soit u une application linéaire définie par*

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+7y \\ 2y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}.$$

On a déjà déterminé $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. *Déterminer le noyau de u.*

Solution.

Exemple 21. *On considère l'endomorphisme d de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :*

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

Déterminer le rang de d.

Corollaire 2.8 : *Caractérisation de l'injectivité en dimension finie*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$$

Démonstration.

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\} \Leftrightarrow 0 = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$$

□

Corollaire 2.9 : *Caractérisation de la surjectivité en dimension finie*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(F)$$

Démonstration.

$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) = F \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(F) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \dim(F)$$

□

Proposition 2.10 : *Caractérisation de la bijectivité en dimension finie*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Supposons que $\dim(E) = \dim(F)$, alors

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow u \text{ est surjective } \Leftrightarrow u \text{ est un isomorphisme}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux corollaires précédents. □

Un endomorphisme injectif (ou surjectif) est nécessairement un isomorphisme.

2.4 Formes linéaires

Définition 2.11 : *Forme linéaire*

Une application linéaire de E vers $\mathbb{R}$ est appelée **forme linéaire**.

Exemple 22. *L'application suivante est une forme linéaire*

$$\begin{array}{rcl} C^0(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$$

Définition 2.12 : *Rappel : hyperplan*

Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$ est appelé **hyperplan** de E.

Proposition 2.13 : *Hyperplan et forme linéaire*

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

$$H \text{ est un hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad H \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur } E.$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Soit u une forme linéaire non nulle sur E. Alors $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à 0. On a donc forcément $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg}(u) = 1$. D'où, par le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u) = \dim(E) - 1.$$

Ceci montre que $\mathrm{Ker}(u)$ est un hyperplan de E.

$\Rightarrow$ Soit H un hyperplan de E (E de dimension n). On considère $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ une base de H et on la complète en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. On définit alors l'application linéaire u par

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ u(e_i) = 0 \text{ et } u(e_n) = 1.$$

u définit bien une forme linéaire de E de noyau H. $\square$

Exemple 23. *Soit* $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + 2y - z = 0 \right\}$. *On définit la forme linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y - z.$$

$H = \mathrm{Ker}(u)$ *donc d'après la proposition précédente H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. En particulier,* $\dim(H) = 2$.